12.06.2023 ALEXANDER STANEV

18 г

$g(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n \in \mathbb{Q}[x]$

$c_i = \frac{r_i}{q_i}$ $(r_i, q_i) = c_i$, $r = [r_0 \dots r_n]$ $q = [q_0 \dots q_n]$

$g(x) = \frac{1}{q} f(x)$ $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$

редукционен критерий

Деф

Казваме че $f(x) = a_0 x^n + \dots a_n \in \mathbb{Z}[x]$ е примитивен полином, ако НОД $(a_0 \dots a_n) = 1$

$g(x) = \frac{1}{q} f(x)$ при $(a_0 \dots a_n) = d$

$\Rightarrow$ $g(x) = \frac{d}{q} f(x)$, $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ - примитивен полином

Т-ма Един полином $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ е примитивен $\Leftrightarrow$ $\forall$ пр. число p съответният полином $\bar{f}(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$, $\bar{f} \neq \bar{0}$

Т. на Гаус

Произведението на 2 примитивни полинома е примитивен полином

Д-во: Нека $f, g \in \mathbb{Z}[x]$, f, g - примитивни $\Rightarrow$ $fg \in \mathbb{Z}[x]$, $\forall p$ - просто число $\bar{f}, \bar{g} \neq \bar{0}$ в $\mathbb{Z}_p[x] \Rightarrow \bar{f} \cdot \bar{g} = \overline{fg} \neq 0$ т. к $\mathbb{Z}_p$ е поле и няма делители на 0-та т.е. $\mathbb{Z}_p[x]$ е област $\Rightarrow$ $\forall p$ - просто число $\overline{fg} \neq \bar{0}$ в $\mathbb{Z}_p[x]$ $\Rightarrow$

fg е примитивен полином □

Т6 Ако $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ и е примитивен полином, $c = \frac{r}{q} \in \mathbb{Q}$, $(r,q) = 1$, $r, q \in \mathbb{Z}$

и $cf(x) \in \mathbb{Z}[x] \Rightarrow c \in \mathbb{Z}$

Д-во $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, $(a_0, \dots, a_n) = 1$

т.к. f - примитивен полином $\Rightarrow$

$$cf(x) = \frac{ra_0}{q} x^n + \frac{ra_1}{q} x^{n-1} + \dots + \frac{ra_n}{q} \in \mathbb{Z}[x]$$

$$q \mid ra_i,\ i = \overline{0..n},\ (q,r) = 1 \Rightarrow q \mid a_i,\ i = \overline{0..n}$$

но от $(a_0, \dots, a_n) = 1 \Rightarrow q \Rightarrow \pm 1 \Rightarrow$

$c = \pm r \in \mathbb{Z}$ □

Т7 Ако $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ е разложим над $\mathbb{Q}$ (полето), то $f(x)$ е разложим и над $\mathbb{Z}$. Тоест един (пресечен) целочислен полином е неразложим над полето $\mathbb{Q} \Leftrightarrow$ (полиномът) е неразложим над пръстена $\mathbb{Z}$

Док-во $f(x) = g(x)h(x)$, $\deg g < \deg f$

$\deg h < \deg f$; $g(x), f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ и $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{r_1}{q_1} h_1(x) \quad h_1(x) \text{ - примитивен} \in \mathbb{Z}[x]$$

$$h(x) = \frac{r_2}{q_2} h_2(x) \quad h_2(x) \in \mathbb{Z}[x],\ h_2(x) \text{ - примитивен}$$

$$f(x) = \frac{r_1 r_2}{q_1 q_2} h_1(x) h_2(x),\ h_1(x), h_2(x) \in \mathbb{Z}[x] \text{ и}$$

q_1, q_2 примитивни и Т на Гаус $\Rightarrow$

$h_1 h_2$ - примитивен, $h_1 h_2 \in \mathbb{Z}[x]$

$\Rightarrow$ по т.б $\Rightarrow \exists c \frac{a_1 a_2}{q_1 q_2} \in \mathbb{Z}$ т.е. $f(x) = c\, h_1(x) h_2(x)$

$= (c\, h_1(x))(h_2(x)) \Rightarrow f$ е разложим над $\mathbb{Z}$
$\in \mathbb{Z}[x] \quad \in \mathbb{Z}[x]$

IV Критерии на Айзенщайн
Th (—И—)

Нека $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \in \mathbb{Z}[x]$
и $\exists$ просто число p т.ч.

1) $p \nmid a_0$: не дели
2) $p \mid a_1 -- a_n$: дели $\forall$ останали
3) $p^2 \nmid a_n$: квадрат на p не дели своб. член

то $f(x)$ е неразложим над $\mathbb{Q}$

Д-во с допускане за противното

допускаме че $f(x)$ е разложим т.е.
$f(x) = g(x) h(x)$, $\deg g < \deg f$, $\deg h < \deg f$

Нека $\bar{f} \in \mathbb{Z}_p[x]$ - редуцираният по модул p полином т.е. $\bar{f} = \bar{a}_0 x^n = \bar{g} \bar{h} =$
$(\bar{b}_0 x^k)(\bar{c}_0 x^\ell)$, $\bar{b}_0 \bar{c}_0 = \bar{a}_0 \neq \bar{0}$, $k + \ell = n$

$\Rightarrow g = b_0 x^k + p g_1$, $h = c_0 x^\ell + p h_1$, $g_1, h_1 \in \mathbb{Z}(x)$

b_0, c_0 - неравенства в $\mathbb{Z}$ на $\bar{b}_0$ и $\bar{c}_0$ от $\mathbb{Z}_p$

$\Rightarrow f = (b_0 x^k + p g_1)(c_0 x^\ell + p h_1)$ $a_n = f(0) =$
$(p g_1(0))(p h_1(0)) = p^2 \underbrace{g_1 h_1(0)}_{p^2 /} = a_n \Rightarrow$
p^2 / a_n ✗ с
$p^2 \nmid a_n \Rightarrow$

f е неразложим над $\mathbb{Q}$

Сл За $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg f = n$ т.ч f е неразложим над $\mathbb{Q}$

Док-во

$f(x) = x^n + p$, p - просто число

$\Rightarrow$ е неразложим над $\mathbb{Q}$ по крит. на Айзенщайн

Деф Полиномите $f(x)$ и $f(ax+b)$ $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$ са едновременно разложими (неразложими) над $\mathbb{Q}$

$f = x^4 + 6x^2 + 8x + 3$, ? f е неразложим над $\mathbb{Q}$

$\pm 1, \pm 3, \pm 9$

$f(1) = 9$ $\quad f(3) = 9$, $\quad f(9) = 9$

$\Rightarrow$ 3 9 не са корени

$f(-1) \neq 0$, $f(-3) \neq 0$, $f(-9) \neq 0$

f няма рационални корени $\Leftrightarrow$

$f \neq (x-a)(x^3 + \dots)$

$f(x) = (ax^2 + x^2 + 6)(x^2 + cx + d)$ $\quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ ac + b + d = 6 \\ ad + bc = 8 \\ bd = 9 \end{cases}$$

$\Rightarrow c = -a$

$\Rightarrow b + d = 6 - ac = 6 + a^2 > 0$

$b + d = 10 \neq 6 + 1$ ✗

$bd = 9 \Rightarrow$ I $\quad b = 1, d = 9 \Rightarrow a9 - a = 8 \Rightarrow a = 1$

II $\quad b = 9, d = 1$ ✗

III $\quad b = 3, d = 3 \Rightarrow$

$3a - 3a = 8$ ✗ - противоречие $\Rightarrow$

$f(x) \neq (x^2 + \ )(x^2 + \ ) \Rightarrow$ неразложим над $\mathbb{Q}$

точно така

$f(x) = 2x^5 - 21x^2 + 42x + 63$

$3/21$, $3/42$, $3/63$ но $3^2/63$ – т.е. не

$7/21$, $7/42$, $7/63$ и $7^2 \nmid 63 \Rightarrow$

$p = 7$ е кр на Айзенщайн $\Rightarrow$ f е неразложим над $\mathbb{Q}$

$f(x) = x^4 - 2x + 3$

$f(x-1) = (x-1)^4 - 2(x-1) + 3 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 - 2x + 2 + 3$

$= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 6x + 6 \Rightarrow p = 2$

$p/4, 6, 6, 6$, $p^2 \nmid 6$

$p = 2$ е кр на Айзенщайн $\Rightarrow$

$f(x-1)$ е неразл над $\mathbb{Q} \Rightarrow f(x)$ е неразл над $\mathbb{Q}$